EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….035**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze în mulțimea numerelor complexe numărul $(1+2i)^2-(1-2i)^2$.

(4p) **b)** Să se calculeze $\cos^2\dfrac{\pi}{12}+\sin^2\dfrac{\pi}{12}$.

(4p) **c)** Să se determine $a \geq 0$ dacă vectorul $\vec{v}=4\vec{i}+a\vec{j}$ are modulul egal cu 8.

(4p) **d)** Să se calculeze lungimea înălțimii din B a triunghiului *ABC* de laturi *AB*=6, *BC*=8, *CA*=10.

(2p) **e)** Să se determine ecuația planului ce trece prin punctul $A(2, 1, 3)$ si este paralel cu planul $x-y+z=2$.

(2p) **f)** Să se scrie ecuația tangentei la cercul $x^2+y^2=2$ în punctul $T(1, 1)$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se determine numărul soluțiilor întregi ale inecuației $x^2-5x+2\leq 0$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\hat{1}\cdot\hat{2}+\hat{3}\cdot\hat{4}+\hat{5}\cdot\hat{6}$ în inelul $\mathbf{Z}_7$.

(3p) **c)** Să se arate că numărul $\log_2 8+\log_3\sqrt{27}$ este rațional .

(3p) **d)** Să se determine câte numere de 3 cifre distincte se pot forma cu cifre din mulțimea $\{1, 2, 3, 4\}$.

(3p) **e)** Să se calculeze probabilitatea ca un element al inelului $\mathbf{Z}_5$ să fie soluție a ecuației $\hat{x}^4=\hat{1}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=xe^{-x}$.

(3p) **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

(3p) **b)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **c)** Să se arate că $e^x \geq ex$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se determine numărul punctelor de inflexiune ale funcției f.

(3p) **e)** Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

și mulțimea $S = \left\{ A \in M_3(\mathbf{C}) \mid AX = XA, \forall X \in M_3(\mathbf{C}) \right\}$.

(4p) **a)** Să se arate că $I_3 \in S$

(4p) **b)** Să se arate că $rang(E_i) = 1$, $\forall i \in \{1,2,3\}$.

(4p) **c)** Să se arate că dacă $A \in M_3(\mathbf{C})$ și $AE_i = E_i A$, $\forall i \in \{1,2,3\}$, atunci există $a \in \mathbf{C}$, astfel încât $A = aI_3$.

(2p) **d)** Să se arate că $S = \left\{ aI_3 \mid a \in \mathbf{C} \right\}$.

(2p) **e)** Să se arate că $(S, +, \cdot)$ este inel, unde operațiile „+” și „·” sunt cele uzuale.

(2p) **f)** Să se arate că funcția $f : \mathbf{C} \to S$, $f(a) = aI_3$ este bijectivă.

(2p) **g)** Să se arate că nicio funcție $g : M_3(\mathbf{R}) \to M_3(\mathbf{C})$, care verifică $g(A \cdot B) = g(A) \cdot g(B)$ $\forall A, B \in M_3(\mathbf{R})$ nu este bijectivă.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f_n : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, definite prin $f_0(x) = x - \sin x$ și

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)dt, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

(4p) **a)** Să se verifice că $f_1(x) = \cos x + \dfrac{x^2}{2} - 1$, $\forall x \in [0, \infty)$.

(4p) **b)** Să se arate că funcția f_1 este convexă pe $\mathbf{R}$.

(4p) **c)** Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că:

$$f_{2n-1}(x) = (-1)^{n-1}\left(\cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n)!} \right), \ \forall n \in \mathbf{N}^*, \ \forall x \in [0, \infty).$$

(2p) **d)** Să se arate că $f_n(x) > 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall x \in (0, \infty)$.

(2p) **e)** Să se arate că:

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{x^{4n}}{(4n)!} - \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{x^{4n}}{(4n)!}, \ \forall n \in \mathbf{N}^*, \ \forall x \in (0, \infty).$$

(2p) **f)** Să se arate că: $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} \right) = \cos x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(2p) **g)** Să se arate că $\cos 1 \notin \mathbf{Q}$.